



Definition des Begriffs Stellenwertsystem

Ein Stellenwertsystem (x -er - System) ist eine Methode der Zahlendarstellung durch Reihung von Ziffern auf der Grundlage der Addition von Potenzen gleicher Basis (x).

Der Wert einer Stelle ergibt sich als Produkt des jeweiligen Ziffernwertes (die höchste Ziffer ist immer gleich x minus eins, die niedrigste Ziffer gleich null) mit einer Potenz von x , deren Exponent durch die Entfernung der Ziffer von der Einerstelle festgelegt ist. Die Entfernung wird in Schreibrichtung negativ und entgegen der Schreibrichtung positiv in Stellen gemessen.

Zahlenqualität von Wurzeln

Kann die Wurzel einer natürlichen Zahl x ein Bruch sein (Wurzel aus x gleich p durch q ; x ist Element der natürlichen Zahlen)?

Wäre

Wurzel aus x gleich p durch q ,

so erhielte man durch Quadrieren die äquivalente Umformung:

x gleich p -Quadrat durch q -Quadrat.

Da p -durch- q ein Bruch, d.h. teilerfremd ist, ist auch p -mal- p durch q -mal- q , d.h. p -Quadrat durch q -Quadrat teilerfremd, also ein Bruch. Damit wäre unabweisbar auch x ein Bruch und eben keine natürliche Zahl.

Mit anderen Worten: Wenn die Wurzel einer Zahl ein Bruch sein soll, dann muß die Zahl selbst auch schon ein Bruch sein, dessen Zähler und Nenner aus ganzzahligen Potenzen bestehen (Beispiel: y gleich neunundvierzig sechsunddreißigstel \Leftrightarrow Wurzel aus y gleich sieben sechstel).

Schlußfolgerung: Die Wurzel einer natürlichen Zahl x kann, wenn sie nicht selbst wiederum eine natürliche Zahl ist (Beispiel: dritte Wurzel aus acht gleich zwei), auch keine rationale Zahl sein. Sie kann aber durch eine rationale Zahl (nämlich durch eine Dezimalzahl ohne Periode) beliebig genau angenähert werden. Solche Zahlen nennt man, weil sie nicht rational (d.h. keine Brüche) sind, algebraisch- (es gibt auch noch transzendent-) irrationale Zahlen.

Erweitert man die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} um die irrationalen Zahlen, erhält man die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Die Menge \mathbb{R} kann durch einen durchgängigen Zahlenstrahl symbolisiert werden, während ein Zahlenstrahl, der \mathbb{Q} symbolisiert, unendlich viele Lücken, nämlich für die irrationalen Zahlen, enthält.