DIFFERENTIALRECHNUNG

Optimierungsprobleme; Bestimmung des Änderungsverhaltens von Funktionen; Kurvendiskussion

1. Vorbemerkung zur Methode

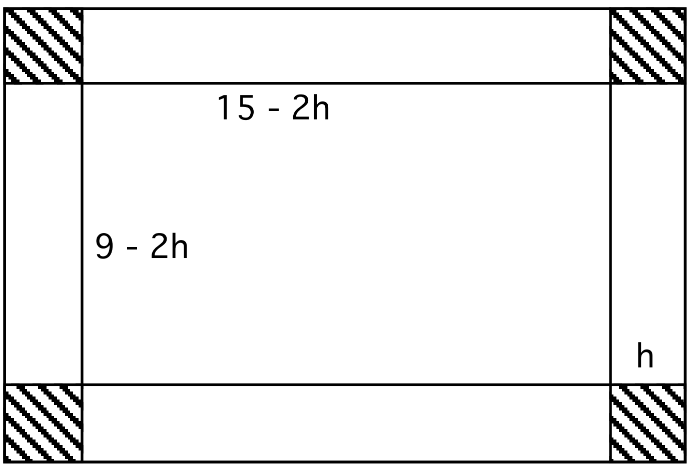
Im folgenden Text wird das Verfahren des exemplarischen Lernens angewendet, d.h. ausgehend von einer leicht nachvollziehbaren praktischen Beispiel-Aufgabe wird durch schrittweise Verallgemeinerung und systematische Einbeziehung modellierender, graphischer, algebraischer, vor allem aber sprachlich-benennend-erklärender Methoden ein schrittweise immer tieferes und allgemeingültigeres Verständnis der im Beispiel wirksamen mathematischen Zusammenhänge erarbeitet. Das Verstehen setzt dabei die Vernetzung dieser Darstellungs- und Begriffsebenen voraus, d.h. die Erkenntnis ihrer wechselseitigen Durchdringung, Verwandelbarkeit und Zurückführbarkeit aufeinander.

2. Beispielaufgabe:

Aus einem rechteckigen Goldblechstück von 15 cm Breite und 9 cm Länge soll eine oben offene, quaderförmige Schachtel größten Volumens geschnitten werden.

3. Modellierung

Der Quader entsteht durch Hochklappen der Seitenwände aus einem entsprechenden *Gitternetz*.



Seine Breite beträgt immer 15 cm minus zwei mal Höhe (h) und seine Länge 9 cm minus zwei mal Höhe. Somit berechnet sich das Volumen (V) des Quaders (Q) nach:

$V_Q = (15 - 2h)\,(9 - 2h)\,h$

Wir erkennen, dass das Volumen nur von *einer* Variablen, nämlich h, abhängt und nicht von dreien, da Breite und Länge ihrerseits aus der gewählten Höhe hervorgehen.

4. Algebraisierung:

Die Variable, von der eine gesuchte Größe abhängt, ist die *unabhängige Variable x.* Die abhängige Größe, das Volumen, bezeichnet man mit y. Wenn es für jedes zugelassene x lediglich einen und nur einen y-Wert gibt, dann ist y eine *Funktion* von x:

$y = f(x)$.

Alternativ dazu sagt man auch: »Die Funktion f bildet x ab auf Funktion von x« oder: »f, x wird abgebildet auf f von x«:

$f: x \to f(x)$.

Da wir auch die Rechenoperationen kennen, mit denen aus einem gegebenen x sein y bestimmt wird, können wir die Funktion um ihre *Funktionsvorschrift* ergänzen:

$y = f(x) = (15 - 2x)(9 - 2x)x$

bzw.

$f: x \to (15 - 2x)(9 - 2x)x$

4.1. Produktform

Diese Form einer Funktionsgleichung ist bereits von den ganzrationalen Funktionen zweiten Grades, den Parabelfunktionen her bekannt, es ist die *Produktform (Linearfaktor-Darstellung)* einer ganzrationalen Funktionen dritten Grades. Aus der Produktform können die Nullstellen unmittelbar abgelesen werden: Ein Produkt ist null, wenn einer seiner Faktoren (die hier aus zwei Klammern der Form ‘Zahl minus 2x’ und einem Einzelfaktor x bestehen) null ist:

$N1\ (0|0)$; $N2\ (4{,}5|0)$; $N3\ (7{,}5|0)$

4.2. Interpretation dieses Ergebnisses:

Ist die Höhe der Kiste null, gibt es keine Kiste, also auch kein Volumen. Beträgt die Höhe 4,5 cm, so wird das Goldblechstück einfach zusammengeklappt und es gibt abermals kein Volumen. Dasgleiche gilt, wenn man das Blech in der Breite faltet. Da man von einer Länge von 9 cm aber nicht auf jeder Seite 7,5 cm wegfalten kann, machen x-Werte, die größer sind als 4,5 keinen Sinn im Rahmen der Aufgabe.

4.3. Definitionsbereich

Wir erhalten also folgenden *Definitionsbereich* für x:

$D = \{x \in R \mid 0 > x < 4{,}5\}$

Man liest: »Der Definitionsbereich ist die Menge aller x, die Element der Menge der reellen Zahlen sowie größer als null aber kleiner als vier Komma fünf sind.«

Für x-Werte, die kleiner als null oder größer als vier Komma fünf sind, beschreibt die Funktion kein Volumen, das von einer Höhe abhängt, sondern einfach abstrakt einen Wert y, der von einem Wert x abhängt.

4.4. Summenform

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die Funktionsgleichung in Summenform (Polynomform):

$y = f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 135x$

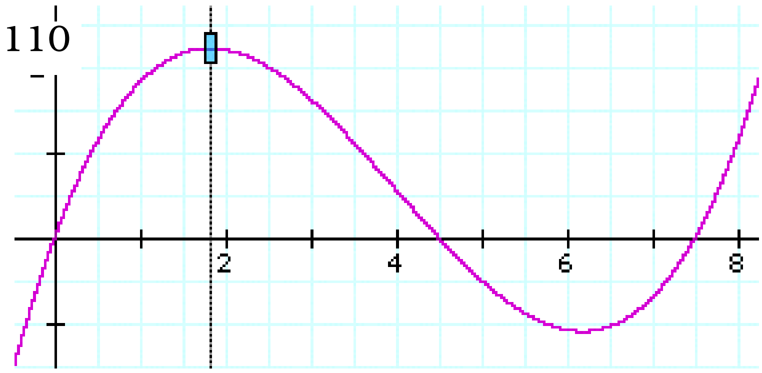
bzw.

$f: x \to 4x^3 - 48x^2 + 135x$

5. Graph der Funktion

Im nächsten Schritt erzeugen wir mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen von f im Bereich $-1 > x < 8$. Dabei ist x definiert als Höhe in Zentimeter (x:= Höhe (cm)) und y als Volumen in Kubikzentimeter (y:= Volumen (cm^3)). Wir tragen soviele Punkte ein, dass wir einen stetigen, glatten Kurvenzug zeichnen können, der weder Ecken noch Beulen enthält. Besonders im Bereich der Gipfel benötigen wir dicht aufeinanderfolgende Punkte.

Bereits mit den drei Nullstellen können wir jedoch eine erstaunlich weitgehende Vorstellung über den Verlauf des Graphen der Funktion gewinnen: Zwischen null und vier Komma fünf verläuft der Graph im positiven y-Bereich des ersten Quadranten und bildet dort offensichtlich eine Art ‘Berg’. Davor kommt er aus der ‘Tiefe’ des dritten Quadranten. Nach der zweiten Nullstelle ‘taucht’ der Graph ab in den vierten Quadranten, bildet dort offensichtlich eine ‘Kuhle’ und verschwindet dann unter Passierung der dritten Nullstelle wieder im positiven Bereich des ersten Quadranten.



Der Graph hat die Form eines liegenden und um 180 Grad parallel zur x-Achse gedrehten ‘S’.

6. Extrempunkte

Der höchste Punkt (Hochpunkt, Maximum) zwischen den ersten beiden Nullstellen ist von besonderem Interesse: Sein x-Wert ist die gesuchte Höhe, bei der die Schachtel ihr größtes Volumen y, das auf der y-Achse ablesbar ist, erreicht.

Abweichend von den Gegebenheiten bei der Parabel gibt es jedoch keine Achsensymmetrie. Das bedeutet, dass der höchste Punkt des Graphen *nicht* in der Mitte zweier Punkte mit gleichen y-Werten (also z.B. zweier benachbarter Nullstellen) liegt.

7. Aporie

An dieser Stelle wird nun das qualitativ Neue der gegebenen Fragestellung deutlich: Bei Extremwert-Aufgaben (Minimax-Aufgaben) sucht man Punkte, von denen man *weder* den x- *noch* den y-Wert kennt: Die entsprechende Gleichung enthält zwei Unbekannte (x und y) und ist somit unlösbar!

8. praktisch-handwerkliche Lösung durch Intervallschachtelung

Natürlich ist auch diese, wie alle praktischen Aufgaben der Mathematik schnell und mit wenig Aufwand über das Verfahren des intelligenten Probierens (*Intervallschachtelung*) mit vernünftiger Genauigkeit (also z.B. Zehntel- oder Hundertstel-Millimeter) lösbar: Die maximale Höhe liegt bei 1,82 cm und das maximale Volumen bei 110,8 cm^3. Aus *handwerklichem* Interesse betrieben (Zweck: Bau einer Schachtel) wäre daher hier das Ende des Verfahrens erreicht; aus *mathematischer* Sicht (Zweck: Verstehen; Ausweiten und Vertiefen der Einsicht in verborgene Zusammenhänge) fängt es gerade erst an:

9. Steigung als Funktion von x

Aus der Betrachtung des Graphen können wir erkennen, dass zwar beide Koordinaten des Extrempunkts unbekannt sind, dass wir aber gleichwohl etwas über diesen Punkt wissen: Er ist der höchste (oder tiefste), d.h. als Fußgänger wären wir oben, am Gipfel, hätten den Anstieg hinter und den Abstieg vor uns: Die ***Steigung*** dieses Punktes ist uns exakt bekannt: Sie beträgt null.

Damit rückt der Begriff – 'Begriff' verstanden als Vorstellung vom Wesen eines Sachverhalts – der *Steigung* in den Mittelpunkt unseres Interesses. Aus abermaliger intensiver Betrachtung des Graphen erkennen wir: Zu einem gegebenen x-Wert gehört immer ein und nur ein Volumen. Aus der Menge aller Punkte, die jeweils für einen beliebigen x-Wert und sein zugeordnetes Volumen stehen, entsteht der Graph der Funktion. Dieser Graph hat in jedem seiner Punkte immer lediglich eine und nur eine Steigung. Wenn und insofern jeder Punkt des Graphen eine und nur eine Steigung aufweist, ist nicht nur das Volumen y eine Funktion der Höhe x, sondern auch die Steigung. Da die Steigung von der gleichen Variable x abhängt wie das Volumen y, gibt man ihr das Symbol y' und spricht von der *Steigungsfunktion* oder auch von der *ersten Ableitung* der Funktion. Man schreibt:

$y' = f'(x)$ bzw. $f': x \rightarrow$

9.1. Bedeutung der Funktionsvorschrift der Steigungsfunktion

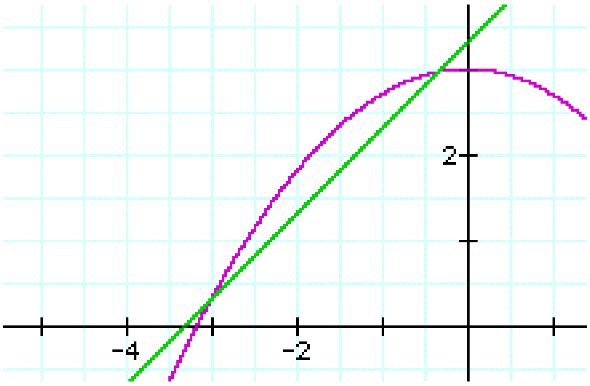
Wenn die Steigung der Funktion ebenfalls eine Funktion ist, muss es prinzipiell möglich sein, auch deren Funktionsvorschrift zu bestimmen. Hätten wir diese Funktionsvorschrift, könnten wir für die Steigung y' am Extrempunkt einfach den Wert null einsetzen und die Gleichung nach dem oder den x-Werten auflösen, bei denen y' eben null ergibt. Es handelt sich also um ein Verfahren, das dem der Bestimmung der Nullstellen einer gegebenen Funktion gleich ist.

Das Problem kann daher auch folgendermaßen beschrieben werden:

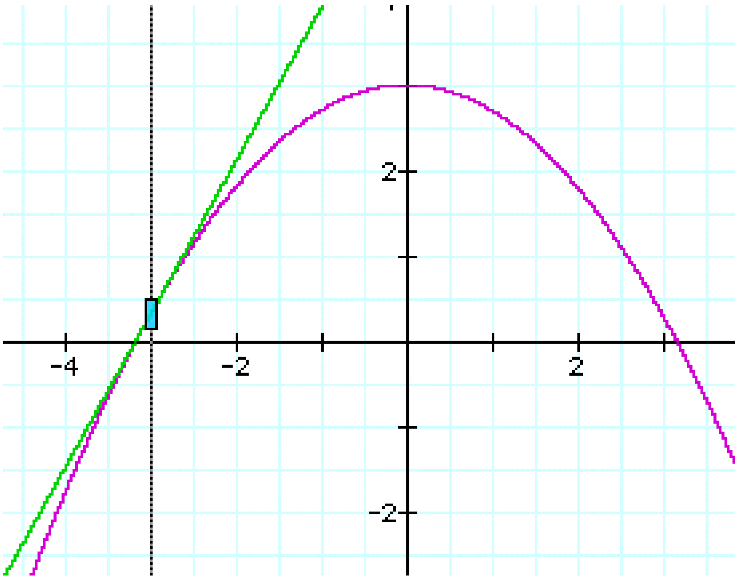
Wie lässt sich auf einem nicht-linearen Graphen die Steigung in einem Punkt darstellen und wie lässt sich der Wert dieser Steigung algebraisch über eine Funktionsvorschrift bestimmen?

9.2. Graphische Bestimmung der Steigung in einem Punkt

Verbindet man zwei beliebige Punkte auf einem Graphen mit einander durch eine Gerade, so entsteht eine *Sekante*.



Lässt man nun den einen dieser beiden Punkte auf den anderen zulaufen, so erhält man eine Schar von Sekanten, deren Steigung sich der Steigung in dem gegebenen Punkt immer mehr annähert. Rückt schließlich der angenäherte Punkt auf den ersten, so verwandelt sich die Sekante in eine *Tangente*, die exakt die Steigung des Punktes aufweist.

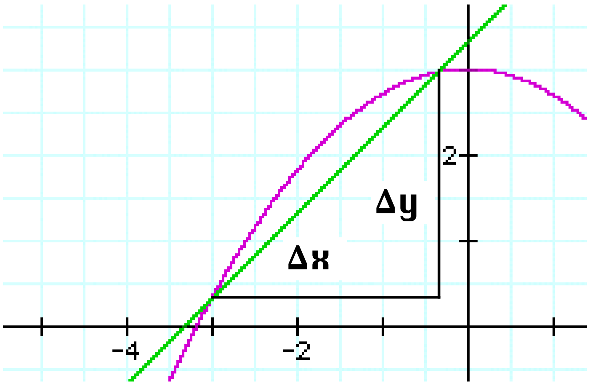


Dass ein gegebener Punkt tatsächlich eine und nur eine Tangente – und das heißt eine und nur eine Steigung – besitzt, kann man sich mit folgender Überlegung klarmachen: Würde man diese Tangente nur um weniges kippen, so schnitte sie sogleich den Graphen in einem weiteren Punkt und verwandelte sich zurück in eine Sekante.

9.3. Algebraische Bestimmung der Steigung in einem Punkt in allgemeiner Form:

Als Steigung einer Geraden bestimmt sich die Steigung einer Sekante als Tangens alpha aus einem angelegten Steigungsdreieck mit Hilfe des Differenzenquotienten nach der Formel:

m = tan alpha = Delta-y geteilt durch Delta-x.



Um die Anzahl der Variablen zu verringern ersetzt man nun Delta-y durch x: Da y eine Funktion von x ist, ist Delta-y als Differenz zweier Funktionswerte von x beschreibbar. Der eine dieser x-Werte (der kleinere) lautet einfach ‘x’; der andere ist um den Betrag Delta-x größer, lautet also x plus Delta-x. Von diesen x-Werten werden nun die Funktionswerte gebildet. So erhalten wir:

»Delta-y gleich *f* von x plus Delta-x minus *f* von x« und als allgemeine Formel der Bestimmung der Steigung einer Geraden:

$$m(Sekante) = \tan alpha = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

9.4. Von der Sekante zur Tangente: Limes für delta-x gegen null

Wenn nun die Sekante zur Tangente wird, muss Delta-x null werden. Die Steigung der Tangente ergibt sich als Grenzwert der Steigung der Sekante für Delta-x gegen null. Für diesen Vorgang der Bildung eines Grenzwerts gibt es den Begriff »*Limes*« – abgekürzt *lim* – (lateinisch für: Grenze). Den Steigungswinkel der Tangente nennen wir ‘tau’ (griechischer Buchstabe für t). Die Steigung ergibt sich somit als Tangens von tau.

9.4.1. Der Differentialquotient

Durch diese Grenzwertbetrachtung entsteht der ***Differentialquotient***, er ist der Grenzwert des altbekannten Differenzenquotienten für Delta-x gegen null. Dieser Differentialquotient ist gleichzeitig die allgemeine Form der Funktionsvorschrift der gesuchten Steigungsfunktion y’ = *f*’(x):

$$y' = f'(x) = m(Tangente) = \tan tau = \frac{\lim}{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Mit dem Differentialquotienten wird die Gültigkeit des Differenzenquotienten in die Breite und Tiefe vorangetrieben zu einem Instrument, mit dem sich die Steigung beliebiger Punkte auf Graphen beschreiben lässt, deren Steigung eine Funktion ist (differenzierbare Funktionen).

10. Überprüfung, Anwendung und Konkretisierung des gefundenen Gesetzes zur Steigungsbestimmung an einem einfachen Beispiel

Wir konstruieren zeichnerisch die Tangente im Punkt P1 (1|1) an die Normalparabel *f*: x –> x^2 und messen den Steigungswinkel $alpha_1$. Er beträgt ungefähr 63° Grad; also beträgt die Steigung in diesem Punkt tan63° ≈ 1,96... Das gleiche Verfahren führen wir für den Punkt P2 (0,5|0,25) durch. Wir erhalten eine Tangente mit dem Steigungswinkel $alpha_2$ von ungefähr 45°; also ist die Steigung im $Punkt_2$ vermutlich tan45° = 1. Wenn wir uns nun Gedanken über den Zusammenhang der x-Werte der Punkte mit den Steigungen der Punkte machen, drängt sich die Vermutung auf, dass bei dieser Normalparabel die Steigung y' doppelt so groß ist, wie der x-Wert des Punktes, also 2x. Wir überprüfen diese Vermutung abermals zeichnerisch an einem dritten $Punkt_3$ (2|4), wo wir einen Steigungswinkel $alpha_3$ von 76°, also – wie vermutet – eine Steigung tan76° ≈ 4 feststellen. Auch, dass die Steigung im Scheitelpunkt null beträgt, stimmt mit der Vermutung über ein, dass die Funktion y = *f*(x) = x^2 die Steigungsfunktion y' = *f*'(x) = 2x hat.

Zwar bestätigt sich diese Vermutung mit jedem weiteren Punkt, aber ein *Beweis* für unsere Vermutung ist dies nicht.

Beispiele beweisen nichts.

11. Algebraisierung: Differentialquotient für *f*: x –> x^2

Um die Vermutung zu beweisen, muss der allgemeine Fall untersucht werden, dessen Gegebenheiten für alle denkbaren Punkte gültig sind. Zu diesem Zweck führen wir die Grenzwertbestimmung mit Hilfe des Differentialquotienten im allgemeinen Fall durch.

y = *f*(x) = x^2

=>

$$y' = f'(x) = m(Tangente) = \tan tau = \frac{\lim}{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Die Funktionsvorschrift verlangt, dass die gegebenen x-Werte quadriert werden. Diese lauten 'x' bzw. 'x + Δx'. Durch Einsetzen und Quadrieren dieser Werte erhalten wir den Differentialquotienten für die Funktion y = *f*(x) = x^2:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \frac{\lim}{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammer und Annullieren von x^2 erhalten wir die äquivalente Umformung:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \frac{\lim}{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

11.1 Algebraische Aporie: Teilen durch null

An dieser Gleichung erkennt man nun die algebraische Aporie der Differentialrechnung in voller Schärfe: Um von der Sekante zur Tangente zu kommen, um also die Steigungsfunktion y' zu bestimmen, müssen wir Δx gleich null setzen, also den Grenzübergang durchführen. Die Division durch null führt jedoch zu keinem definierten Ergebnis, sie kann nicht ausgeführt werden. Man überwindet diese Aporie durch einen rechnerischen Trick, der darin besteht, dass Δx zunächst im Zähler ausgeklammert und dann gegen das Δx im Nenner zu 1 gekürzt wird:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}^{1}\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}\,1}$$

Da nun im Nenner nicht mehr Δx steht, sondern als Ergebnis des Kürzens der Faktor 1, können wir getrost den Grenzübergang durchführen, also Delta-x gleich null setzen und erhalten als Ergebnis die Bestätigung unserer Vermutung:

y' = *f*'(x) = 2x.

Wenn wir für ein x^2 die Steigung 2x bekommen, dann erhalten wir logischerweise für $-48x^2$ eine Steigung von -96x.

12. Schrittweise Erzeugung der Steigungsfunktion von *f*: x –> $44x^3 - 48x^2 + 135x$

Der letzte Summand der abzuleitenden Funktionsgleichung für das Volumen der Goldblechschachtel lautet +135x. Dieser Term, der uns aus der Unterrichtseinheit über die linearen Funktionen bekannt ist, entspricht einer Geraden mit der Steigung 135.

12.1. Algebraisierung: Differentialquotient für *f*: x –> x^3

Damit bleibt von der Funktionsgleichung *f* nur noch der Ausdruck $4x^3$ abzuleiten. Wir vereinfachen zu y = *f*(x) = x^3 und führen das analoge Verfahren durch wie mit y = *f*(x) = x^2:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

Wir annullieren x^3, klammern Δx aus, kürzen es und erhalten:

$$y' = f'(x) = \tan tau = \lim_{\Delta x \to 0} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{\Delta x}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\cancel{\Delta x}\,1}$$

Wenn nun der Grenzübergang durchgeführt wird, 'verschwinden' erfreulicherweise alle Summanden außer $3x^2$, da gilt: Ein Produkt ($3x\Delta x$ bzw Δx^2) ist null, wenn einer seiner Faktoren (Δx) null ist. So erhalten wir für die Funktion

y = *f*(x) = x^3

die Steigungsfunktion (erste Ableitung)

$y' = f'(x) = 3x^2$.

Für $2x^3$ erhalten wir entsprechend $2(3x^2)$, bzw. allgemein ausgedrückt erhalten wir für ax^3 die Ableitung $3ax^2$.

13. Durch vermutende Algebraisierung zur Potenzregel

Wir treiben die Verallgemeinerung noch eine Stufe weiter, indem wir eine Vermutung darüber ausbilden, wie Funktion und Ableitungsfunktion auseinander hervorgehen:

$x \rightarrow 1$	(Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich dem Faktor vor x)
$x^2 \rightarrow 2x$	(Mit Differentialquotient bewiesen)
$x^3 \rightarrow 3x^2$	(Mit Differentialquotient bewiesen)

An der Oberfläche betrachtet sieht es so aus, dass der Exponent der Funktion als Faktor vor das x der Ableitung »wandert«, deren Grad (Exponent) dabei um eins verringert wird. Algebraisiert man diesen Zusammenhang, so erhält man:

$y = f(x) = x^n$ (oder mit einem beliebigen Faktor vor x: ax^n)

=>

$y' = f'(x) = nx^{n-1}$ (oder: anx^{n-1})

Den so als Vermutung gefundenen Zusammenhang nennt man *Potenzregel*.

13.1. Herleitung der Potenzregel

Ihre Herleitung kann man auf folgende Weise verstehen:

Bildet man den Differentialquotienten für x^n, so sieht der Zähler folgendermaßen aus:

$(x + \Delta x)^n - x^n$. Das Problem an diesem Ausdruck ist das Ausmultiplizieren der Klammer $(x + \Delta x)^n$. Es ist unschwer ersichtlich, dass der *erste* Summand dieser ausmultiplizierten Klammer x^n ist und sich mit dem $-x^n$ des Zählers annulliert (genauso, wie es für die im Detail ausgerechneten Fälle von x^2 und x^3 der Fall war). Der *letzte* Summand ist natürlich entsprechend Δx^n. Welche Gestalt hat nun der entscheidende, *zweite* Summand? Dieser Summand ist seinerseits ein Produkt aus x und Δx. Die Frage ist nur: Welche Exponenten und welchen Koeffizienten haben x und Δx? Die *Exponenten* der durch das Ausmultiplizieren der Klammer $(x + \Delta x)^n$ entstehenden Summanden folgen dabei einer einfachen Regel: Von links nach rechts verringert sich – ausgehend von n – von Summand zu Summand der Exponent von x und wächst – ausgehend von 0 – der Exponent von Δx um je 1. Der gesuchte zweite Summand lautet also: $ax^{n-1}\Delta x^1$, wobei der Koeffizient a noch unbestimmt ist.

Zur Bestimmung dieses Koeffizienten dient das sogenannte *Pascal'sche Dreieck:*

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(0) & & & & & & 1 & & & & & \\
(1) & & & & & 1 & & \underline{1} & & & & \\
(2) & & & & 1 & & \underline{2} & & 1 & & & \\
(3) & & & 1 & & \underline{3} & & 3 & & 1 & & \\
(4) & & 1 & & \underline{4} & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(5) & 1 & & \underline{5} & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

usw.

Die Zahlen jeder Zeile sind jeweils die Summe der darüber stehenden Summandenpärchen. Die so gebildeten Zahlenreihen sind u.a. die Koeffizienten, die beim Ausmultiplizieren einer Klammer $(a + b)^n$ (oder $(x + \Delta x)^n$) entstehen, deren Exponent n der (in Klammern gesetzten) Zeilennummer entspricht. Die Konstruktion dieses Dreiecks macht deutlich, dass die jeweils zweite Zahl jeder Zeile identisch mit der Zeilennummer ist. Das gilt mit 2 für $(x + \Delta x)^2$, mit 3 für $(x + \Delta x)^3$ und natürlich auch mit n für $(x + \Delta x)^n$. Damit ist der gesuchte Koeffizient des zweiten Summanden bestimmt. Der Summand lautet: $nx^{n-1}\Delta x^1$. Alle nachfolgenden Summanden bis hin zu Δx^n haben Δx in höherer Potenz als 1. Wenn nun alle verbleibenden Summanden des Zählers – (x^n und $-x^n$ haben sich ja bereits annulliert) – durch Δx im Nenner gekürzt werden, bleibt vom zweiten Summanden nx^{n-1} übrig. Nun führt man den Grenzübergang $\Delta x = 0$ durch und damit werden *außer dem zweiten* alle weiteren Summanden, die den Faktor Δx noch enthalten, zu 0 und der Beweis ist erbracht:

$y = f(x) = x^n$ *(oder:* ax^n*)*

=>

$y' = f'(x) = nx^{n-1}$ *(oder:* anx^{n-1}*).*

13.2. Überprüfung und Bestätigung der Potenzregel durch Anwendung auf die bereits bekannte Steigung einer linearen Funktion

Überprüfen wir die Potenzregel zusätzlich am ‘einfachen’ Fall der Geraden $y = f(x) = x$. Die Steigung einer solchen Geraden hatten wir bislang mit Hilfe des Differenzenquotienten (Differenz der y-(Funktions-)Werte zweier Punkte geteilt durch die Differenz ihrer x-Werte) bestimmt. Nun versuchen wir es mit dem Differentialquotienten: Für x kann man auch x^1 schreiben, so dass sich in Anwendung der Potenzregel als erste Ableitung ergibt:

$y' = f'(x) = 1x^{1-1}$. x^{1-1} aber ist x^0 und x^0 ist gleich 1, also:

$y = f(x) = x$

=>

$y' = f'(x) = 1$.

Wir kommen im Fall der Geraden also mit dem Differentialquotienten auf etwas kompliziertere Weise zum gleichen Ergebnis wie mit dem Differenzenquotienten.

13.3. Überprüfung und Bestätigung der Potenzregel durch Anwendung auf die bereits bekannte Steigung einer konstanten Funktion

Überprüfen wir die Potenzregel weiter am scheinbar noch einfacheren Fall einer konstanten Funktion: $y = f(x) = 5$, bzw. $y = f(x) = k$; ($k \in R$):

Für 5 können wir auch schreiben 5 mal 1. Für 1 können wir schreiben x^0; also lautet die konstante Funktion so umgeformt (‘verkompliziert’):

$y = f(x) = 5\,x^0$

=>

$y' = f'(x) = 0\,(5\,x^{0-1}) = 0$

und in der Tat wissen wir schon lange, dass konstante Funktionen graphisch Parallelen zur x-Achse darstellen, also die Steigung null besitzen.

14. Die Leistungen der Abstraktion (Algebraisierung)

Mit den beiden letzten diskutierten Fällen wird eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit deutlich: Gelingt es, erkannte Gesetzmäßigkeiten, wie z.B. die über die Steigung konstanter und linearer Graphen zu verallgemeinern, wie wir es für ganzrationale Funktionen in der Gestalt der allgemeinen Steigungsfunktion *(ax^n –> nax^{n-1})* geleistet haben, dann sind die vorgängigen Erkenntnisse in den nachmaligen *aufgehoben*, d.h. die neue Erkenntnis geht weiter und tiefer, sie gilt sowohl für die neuen als auch für die alten Fragestellungen. Dies ist der Lohn der mathematisch-algebraischen Beweisführung bzw. allgemein gesagt der Abstraktion von Beispielen (Schachtelaufgabe) auf die ihnen innewohnenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten.

15. Lösung der Aufgabe

Schlussendlich können wir nun zur Lösung der Schachtelaufgabe voranschreiten:

$y = f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 135x$

=>

$y' = f'(x) = 12x^2 - 96x + 135$

Setzen wir für y' null ein, da die Steigung bei $x_{max/min}$ gleich null ist, so erhalten wir eine einfache quadratische Gleichung als des Rätsels Lösung:

$0 = f'(x_{max/min}) = 12x^2 - 96x + 135$

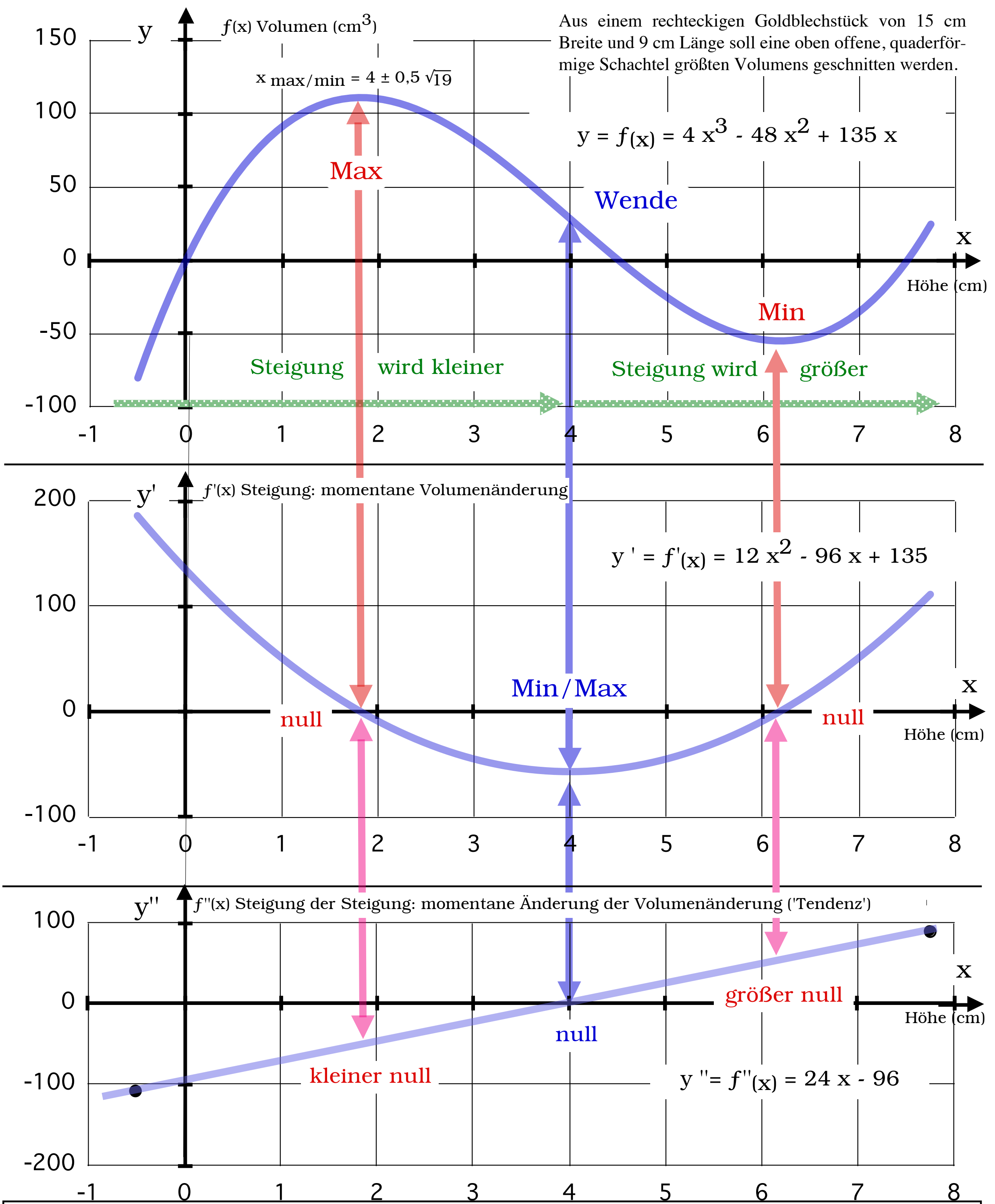
<=>

$x_{max/min} = 4 \pm 0{,}5\sqrt{19}$

16. Algebraische und graphische Beziehungen zwischen Funktion und Ableitungsfunktion

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat maximal n Nullstellen; die entsprechende Gleichung also maximal n Lösungen. Da zwischen zwei Nullstellen maximal ein Extrempunkt liegen kann, so ist die Anzahl der Extrempunkte maximal um eins kleiner als die der Nullstellen. Kommt nach einem Hochpunkt ein weiterer Extrempunkt, so handelt es sich dabei zwangsläufig um einen Tiefpunkt.

Die Bestimmung der Steigungsfunktion mit dem Differentialquotienten bewirkt, dass der Grad der Ableitungsfunktion stets um eins geringer ist, als der der Funktion. Für die Graphen bedeutet dies, dass die Anzahl der Nullstellen, der Extrempunkte (und der Wendepunkte s.u.) ebenfalls im Graphen der Ableitungsfunktion um eins verringert ist.



Die wichtigsten Zusammenhänge der Differentialrechnung auf einem Blatt. Funktionsgraph (Volumen abhängig von der Höhe): dritten Grades; Steigungsfunktion (1. Ableitung, momentane Volumenänderung): zweiten Grades und 2. Ableitung (Änderungsverhalten, 'Tendenz'): linear. Die x-Achsen sind identisch.

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Kommentar
0	0	135	-96	Nullstelle
1,8206...	110,8191	0	-52,3068	Maximum
4,5	0	-54	12	Nullstelle
4	28	-57	0	Wendepunkt
7,5	0	90	84	Nullstelle
6,1794...	-54,819...	0	52,3067...	Minimum

16.1. Unterscheidung von Hoch- oder Tiefpunkt

Wie schon ausgeführt, ordnet der Graph der Ableitungsfunktion jedem x der Funktion seine Steigung zu. An den Extrempunkten ist die Steigung null, also weist der Graph der Steigungsfunktion an ihren x-Werten Nullstellen auf. Woran kann man nun erkennen, ob der x-Wert der Nullstelle der Steigungsfunktion zu einem Hoch- oder zu einem Tiefpunkt gehört?

Betrachten wir uns den Hochpunkt der Funktion genau, so erkennen wir, dass dort mit ansteigenden x-Werten – bzw. von links nach rechts gehend – ein Übergang von einer positiven Steigung zu einer negativen stattfindet: Vor dem Hochpunkt ist der Steigungswert größer als null, nach dem Hochpunkt ist er kleiner als null (»zum Hochpunkt hin bergauf, vom Hochpunkt weg bergab«). Dies bedeutet für den Graphen der Steigungsfunktion, dass an einer Nullstelle, die einem Hochpunkt der Funktion entspricht, ein Übergang von plus nach minus stattfindet. Dies wiederum bedeutet, dass eine solche Nullstelle, die im Graphen der Ableitungsfunktion einem Hochpunkt der Funktion entspricht, ihrerseits eine negative Steigung aufweist.

Für den Tiefpunkt der Funktion liegen die beschriebenen Zusammenhänge und Verhältnisse entsprechend umgekehrt. Dem Tiefpunkt der Funktion entspricht eine Nullstelle der Ableitungsfunktion, deren Steigung positiv ist (Übergang von minus nach plus).

Wir erkennen, dass nicht nur die Steigungsfunktion einer Funktion wichtige Erkenntnisse bereit hält, sondern dass wir für exakte Bestimmungen (Hoch- oder Tiefpunkt) auch die Steigungsfunktion selbst auf ihre Steigung hin befragen müssen.

16.2.1. Wendepunkt

Zwischen Hoch- und Tiefpunkt muss der Graph aus einer Rechts- in eine Linkskurve übergehen: Er ändert sein Krümmungsverhalten. Bis zu einem bestimmten Punkt wird die Steigung des Graphen der Funktion immer kleiner; dabei erreicht sie am Hochpunkt den Wert null und wird nach Überschreiten des Hochpunktes negativ, also noch kleiner. Der Punkt, an dem dieses Kleinerwerden der Steigung aufhört und ab dem die Steigung wieder größer wird, heißt *Wendepunkt*. Obacht: Am Wendepunkt kann die Steigung beliebige negative Werte haben! Darauf kommt es nicht an, entscheidend ist, dass *ab* diesem Punkt die Steigungswerte wieder größer werden. Sie erreichen bei ihrem Wachstum irgendwann den Wert null und wir sind an einem weiteren Extrempunkt, dem Tiefpunkt angelangt usw. Der Wendepunkt ist also der Punkt des Funktionsgraphen, an dem das Kleinerwerden der Steigung in ein Größerwerden umschlägt.

Im Graphen der Ableitungsfunktion entspricht dem Wendepunkt der Punkt, wo das Kleinerwerden ins Größerwerden umschlägt und dies ist am Tiefpunkt dieses Graphen der Fall. Diesen Zusammenhang kann man rechnerisch auswerten: Man bestimmt den Tiefpunkt der Ableitung und hat damit gleichzeitig den x-Wert des Wendepunktes der Funktion.

Es muss wohl nicht lang und breit ausgeführt werden, dass auch beim Übergang von einem Tief- zu einem Hochpunkt ein Wendepunkt überschritten werden muss. Einem solchen Wendepunkt entspricht im Graphen der Ableitungsfunktion ein Hochpunkt.

Wie aber bestimmt man den Tiefpunkt des Graphen der Ableitungsfunktion? Ist diese Funktion wie in dem von uns diskutierten Beispiel eine Parabel, so haben wir leichtes Spiel: Wir bilden einfach den Mittelwert der x-Werte der Nullstellen, die wir ja schon bestimmt haben, um die Extrempunkte der Funktion zu finden.

16.2.2 Zweite Ableitung: Steigung der Steigung

Ist die Steigungsfunktion aber höheren Grades, so wenden wir auf sie einfach das gleiche Verfahren an wie auf die Funktion: Wir befragen die Steigungsfunktion auf ihren Extrempunkt und bilden zu diesem Zweck die Steigungsfunktion der Steigungsfunktion, die Ableitung der Ableitung oder auch einfach die *zweite Ableitung*: y'' = $f''(x)$ bzw. f'': x –>.

Die Nullstelle der zweiten Ableitung hat denselben x-Wert wie der Tief- oder Hochpunkt der ersten Ableitung und der Wendepunkt der Funktion.

Ist die Nullstelle der zweiten Ableitung ein Übergang von minus nach plus, so ist der Extrempunkt der ersten Ableitung ein Tiefpunkt und der Wendepunkt der Funktion ein Übergang von der Rechts- in die Linkskurve bzw. vom Kleinerwerden der Steigung zum Größerwerden.

(Ist entsprechend die Nullstelle der zweiten Ableitung ein Übergang von plus nach minus, so ist der Extrempunkt der ersten Ableitung ein Hochpunkt und der Wendepunkt der Funktion ein Übergang von der Links- in die Rechtskurve bzw. vom Größerwerden der Steigung zum Kleinerwerden.)