Dr. Rainer v. Kügelgen

ZUM BEGRIFF DER FUNKTION: HERLEITUNG, VERORTUNG, ANWENDUNG

Die in der Welt vorfindlichen Dinge, Sachverhalte und Prozesse, mit einem Wort: die Elemente des Faktischen, stellen sich ihrer geistig-sprachlichen Aufnahme durch den Menschen zunächst zusammenhangslos, isoliert, als je einzelne entgegen. Der lebenslange Lernprozess ist geradezu als eine Überwindung dieses naturwüchsigen Eindrucks beschreibbar. Dabei tritt an die Stelle der naturwüchsigen Widerspiegelung der Dinge, Sachverhalte und Prozesse als voneinander isolierter die zunehmende Einsicht in deren vorhandene Zusammenhänge und Abhängigkeiten. Die Zunahme der Einsicht ist gekennzeichnet durch die Erkenntnis der inneren Gründe, aus denen heraus die Dinge, Sachverhalte und Prozesse miteinander verbunden sind.

In einer ersten summarischen Überwindung der geistigen Aufnahme der Phänomene als einzelner und getrennter kommt es in allen Hochkulturen der Menschheit recht früh zu der Einsicht, dass ›alles mit allem zusammenhängt‹. Die über die Zeit erbrachten Nachweise, in welcher Weise dies im Einzelnen und konkret der Fall ist, kann man als den *Weg der Wissenschaft durch die Geschichte* beschreiben. In einem durch Übertreibung veranschaulichten Beispiel kann die Chaos-Forschung (ein Zweiggebiet der Mathematik) deutlich machen, dass zwischen dem Flügelschlag eines Schmetterlings in Kanton und dem Ausbrechen eines Hurricans in Dakota, USA, nicht nur vage ein Zusammenhang besteht, sondern dass ersterer für letzteren unter bestimmten und auch bestimmbaren Umständen auslösend bzw. ursächlich sein kann.

Bei dem angesprochenen Nachweis, wie die Elemente des Faktischen, d.h. Dinge, Sachverhalte und Prozesse, im Einzelnen und konkret zusammenhängen, d.h. bei der Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnis, geht es einerseits um das Erkennen der isolierten Phänomene als zugehörig zu einem bestimmten Typ, bzw. darum, Klassen von Phänomenen als einem gemeinsamen Wesen zugehörig zu erkennen. Es geht andererseits um die Wechselwirkungen der einen Dinge und Sachverhalte mit den anderen.

Durch diese Wechselwirkungen formen sich die Dinge und Sachverhalte zu *Prozessen*, die ihrerseits wiederum in Wechselwirkung mit anderen Prozessen stehen. In beiden Fällen wird das Verständnis der Gemeinsamkeiten und der Wechselwirkungen in *Begriffen* nachgezeichnet. Begriffe werden damit als Kondensate geistiger Erkenntnisprozesse, als in (Fach-)Worten abgebundene Konzepte, als Werkzeuge des Verstehens kenntlich: *Aufgabe der Wissenschaft ist die Rekonstruktion des Faktischen im Begriff.*

Wenn Erkenntnis nichts ist, als die Einsicht in das, worüber das Phänomen mit seinem Wesen vermittelt ist (mit ihm zusammenhängt), bzw. nichts als die Einsicht in die Wechselwirkungen der Phänomene, dann rückt die genaue Erfassung der Zusammenhänge und Wechselwirkungen ins Zentrum des Erkenntnisprozesses selbst. Eine erste analytische Aufschließung fragt bei den Wechselwirkungen nach deren Richtung und unterscheidet zwischen einseitigen und beid- bzw. mehrseitigen Abhängigkeiten. Sie fragt bei den Zusammenhängen nach deren Qualitäten und unterscheidet zwischen solchen, deren Wesen unbekannt und nicht erfassbar bzw. bekannt und erfassbar ist. Bei den erfassbaren Zusammenhängen ist das Wissen um die zeitliche Aufeinanderfolge der Phänomene der Archetyp und die Unterscheidung nach Ursache und Wirkung, Bedingung und Folge die spezifizierte Weiterentwicklung.

Eine weitere Unterscheidung, auf die aus Gründen der Zweckverfolgung in der menschlichen Gesellschaft besonders großes Gewicht gelegt wird, ist die zwischen solchen Abhängigkeiten, bei denen die Erfassung der einen Seite verlässliche *Voraussagen* über die andere Seite erlaubt und solchen, wo dies nicht der Fall ist. Der verfolgte Zweck besteht in der Befähigung zu Vorhersagen, d.h. zu Antizipationen (Vorwegnahmen) solcher Phänomene, die notwendig eintreffen werden, wenn die eine Seite des voneinander abhängigen Zusammenhangs gegeben ist. Ein Spezialfall der Antizipation ist die präzise Bestimmung im Sinne von Quantifizierbarkeit, d.h. die Berechenbar-keit. Antizipation ist eine Voraussetzung dafür, Vorgänge bewusst zu steuern und zu beeinflussen.

Indem, ausgehend von dem Bekanntsein der einen Seite voneinander abhängiger Dinge, Sachverhalte oder Prozesse, die andere mehr oder weniger verlässlich theoretisch vorweggenommen werden kann, ist wohlgemerkt noch keine Aussage über die Gründe, bzw. die Ursachen der Abhängigkeit getroffen. Es wird lediglich beschrieben, *dass* und gegebenenfalls *wie* die Elemente des Faktischen zusammenhängen, nicht aber *warum*. In der Praxis eröffnet jedoch normalerweise gerade die Erkenntnis der Ursachen und Gründe die Möglichkeit der Erfassung der Abhängigkeiten im Sinne der theoretischen Bestimmung der jeweils vorerst nicht bekannten Seite der jeweiligen Abhängigkeit.

Aus dem Gesagte erhellt, dass solchen Abhängigkeiten, bei denen aus gegebenen Umständen *eindeutig* auf gesuchte geschlossen werden kann, besondere Bedeutung zukommt.

Solche Abhängigkeiten nennt man in der Mathematik *Funktionen*.

Im Unterschied zum Allgemeinbegriff der Abhängigkeit wird im Begriff der Funktion jedoch von einer im Begriff der Abhängigkeit noch vorhandenen kausalen Qualität abgesehen. Es ist nur noch grundsätzlich von einer *Zuordnung* der Phänomene zueinander die Rede. Als entscheidend für das Vorliegen einer Abhängigkeit im Sinne des Funktionsbegriffs verbleibt allein das Kriterium der Eindeutigkeit, mit dem das Eine vom Anderen abhängt. Wenn etwa jeder Staat eine und nur eine Hauptstadt hat, so ist ‚Hauptstadt-haben‘ eine Funktion von ‚Staat-sein‘, auch wenn niemand aus dem Namen eines Staates den Namen der zugehörigen Hauptstadt kausal oder rechnerisch herleiten kann.

Das, was vom einen, Gegebenen abhängt, nennt man die *abhängige Größe* (abhängige Variable: y), das, von dem das andere abhängt, nennt man die *unabhängige Größe* (unabhängige Variable: x).

Wenn y von x eindeutig abhängt, d.h. dass zu einem gegebenen x ein und nur ein y gehört, so ist y eine Funktion von x.

Man schreibt algebraisch-symbolisch $y = f(x)$ und spricht: »ypsilon gleich f von x«.

Machen wir uns den Begriff der Eindeutigkeit am Beispiel der Beziehungen (der Abhängigkeiten) zwischen Mutter und Kindern klar: Von vornherein entfällt für die Mathematik alles an diesen Beziehungen, was eigentlich interessant ist, nämlich die sozialen, psychischen und ethischen Aspekte. Betrachtet wird allein die Frage der Eindeutigkeit der Zuordnungen zueinander. Da jedes Kind eindeutig eine (leibliche) Mutter hat und nie zwei, also zu jedem Kind eine und nur eine Mutter gehört, ist klar: »Mutter-Haben« ist eine Funktion von »Kind-Sein«. Da umgekehrt aber eine Mutter ein oder mehrere Kinder haben kann, also zu einer Mutter nicht eindeutig ein und nur ein Kind gehört, ist ebenfalls klar: »Kind-Sein« ist keine Funktion von »Mutter-Haben«. Paradoxerweise „hängen" also für Mathematiker die Mütter von den Kindern „ab", nicht aber die Kinder von den Müttern. Das Paradox zeigt, dass Ausdrücke in fachbegrifflicher Verwendung das exakte Gegenteil ihrer allgemeinsprachlichen Bedeutung tragen können.

Überprüfen wir die Erläuterung der Begriffe der Funktion und der Eindeutigkeit an einem weiteren Beispiel, nämlich an den Beziehungen zwischen Brief und Porto: Jeder Brief hat ein und nur ein Porto, also ist das Porto eine Funktion (der Masse, der Maße und des Bestimmungsortes) des Briefes. Ein gegebenes Porto dagegen kann zu mehreren und ganz verschiedenen Briefen gehören. Egal, ob die Briefe fünf, zehn, siebzehn oder zwanzig Gramm wiegen, sie kosten gleichviel (bei gleichen Maßen und Bestimmungsorten). Es ist also unmöglich, vom Porto eindeutig auf die Masse (die Maße oder die Bestimmungsorte) der Briefe zu schließen: Brief ist keine Funktion von Porto.

Andererseits besteht jedoch fraglos (irgend-)eine Beziehung zwischen Porto und Brief. Der Brief kann z.B. nicht fünf Kilogramm wiegen, ein Apfel mit Briefmarke gilt nicht als Brief und der Bestimmungsort ›Hölle‹ kann ausgeschlossen werden. Da also Porto und Brief überhaupt eine Beziehung haben, im Gegensatz etwa zu Porto und Schuhgröße des Portozahlenden, spricht man im Falle einer solchen, zwar gegebenen, also nicht willkürlichen aber dennoch nicht eindeutigen Zuordnung von einer *Relation*.

Zwischen Brief und Porto besteht eine Relation – Porto ist eine Funktion von Brief.

Beide diskutierten Beispiele zeigen, dass systematisch unterschieden werden muss, in welcher Richtung die Abhängigkeit zweier Größen voneinander untersucht wird. Im Gegensatz zu beiden diskutierten Beispielen sind die Beziehungen etwa zwischen der Menge der verbrauchten Telephon-Einheiten und dem dafür fälligen Rechnungsbetrag, der sich nach dieser Menge und einer Grundgebühr bestimmt, in beiden Richtungen eindeutig. Bei ein- und derselben Telephongesellschaft gilt: Man kann eindeutig von der Menge der verbrauchten Einheiten auf den zu zahlenden Betrag schließen und man kann umgekehrt ebenfalls vom Rechnungsbetrag eindeutig die Menge der verbrauchten Einheiten bestimmen (wenn man zusätzlich die Höhe der Grundgebühr kennt). Eine solche Abhängigkeit zweier Größen, die in *beiden* Richtungen eindeutig, also in beiden Richtungen eine Funktion ist, nennt man eine *eineindeutige* Zuordnung. Sie ist das Wesen aller *linearen* Funktionen. Mit dem Beispiel der Telephongesellschaft sind wir gleichzeitig bei einem Sonderfall der Funktionen angelangt, nämlich solchen, bei denen ein quantifiziert bestimmtes x die quantifizierte Bestimmung des zugehörigen y erlaubt, wo man also „das y aus dem x ausrechnen kann“.

Aus den Qualitäten der jeweiligen Größen ergeben sich im Normalfall auf logischem Weg diejenigen Werte, die x oder y sinnvoller Weise annehmen kann. Die Menge aller dieser Werte nennt man für x *Definitionsmenge (-bereich)* und für y *Wertemenge (-bereich)*. So kann es z.B. bei einer Telephongesellschaft, wo x die Menge der verbrauchten Einheiten bezeichnet, für x nur ganzzahlige positive Werte größer oder gleich Null geben. Man schreibt in diesem Falle algebraisch-symbolisch $D = \{x \mid x \in N\}$ und spricht: „Definitionsbereich ist Menge aller ix, für die gilt: ix ist Element der Menge der natürlichen Zahlen“. Falls keine derartigen Definitionsbereiche angegeben sind, gilt immer die Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich.

Um nun „ausrechnen“ zu können, muss gefunden werden, *wie* aus einem gegebenen x das zugehörige y bestimmt wird. Dabei entsteht eine *Rechenvorschrift*, die angibt, welche mathematischen Verfahrensweisen auf x angewendet werden und mit Hilfe welcher mathematischen Operationen die so entstehenden Elemente zu verbinden sind. Die Verfahrensweisen können ihrerseits wieder Funktionen sein, etwa Winkel-, Logarithmus- oder Exponentialfunktionen. Die Operationen werden in den bekannten Rechenzeichen niedergelegt.

Das Ergebnis des Verfahrens zur Erzeugung des zugehörigen y aus jedem zulässigen x ist eine *Funktionsvorschrift*. Sie wird in algebraisch-symbolischer Form angegeben und lautet für lineare (eineindeutige) Funktionen: $y = f(x) = mx + b$. In einem weiteren Abstraktionsschritt wird sie zu einer für alle sogenannten ganzrationalen Funktionen n-ten Grades gültigen Form verallgemeinert: $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Die Funktionsvorschrift muss ihrerseits nach gewissen Verfahren mathematisch bestimmt werden, z.B. aus gegebenen Punkten (bei linearen Funktionen mit Hilfe des Steigungsdreiecks). Wie dies zu bewerkstelligen ist, ist hier aber nicht unser Thema.

Abschließend ist festzuhalten, dass nicht nur die ›Funktion‹ bereits ein hochgradiger Spezialfall des Sachverhalts ›Zusammenhang‹ ist, sondern dass der in der Schule nahezu ausschließlich behandelte Normalfall, nämlich eine Funktion mit bestimmbarer Funktionsvorschrift, ein noch weiterer Spezialfall des Spezialfalls ist. Da sich das ursprüngliche Verstehen (der ›gesunde Menschenverstand‹) aber an den grundlegenden, allgemeinen Standardsituationen und Problemen orientiert, kann es (er) keinen Bezug zu hochgradigen, unabgeleiteten Spezialfällen herstellen. Die unreflektierte Hinnahme von Spezialfällen oder gar Spezialfällen zweiter Stufe als selbstverständlicher Standardform schulischer Beschäftigung schlägt sich beim Großteil der betroffenen Schüler (aber auch Lehrer) daher in einer unüberbrückbaren Kluft zwischen Lebenswelt und Allgemeinsprache einerseits und den auf mathematischem Wege gewonnenen Resultaten andererseits, d.h. in der Unbrauchbarkeit dieser Resultate und in einem sich im Lauf der Jahre verfestigenden Unverständnis nieder. Das zu Grunde liegende ›black-box-Prinzip‹ führt in harmlosen Fällen lediglich zur Fachidiotie, in schwerwiegenden aber zu der Katastrophe einer grundsätzlichen Sinnlosigkeit und Beliebigkeit (›anything goes‹) des mathematischen Tuns.

Dazu beizutragen, dies zu vermeiden, ist Zweck der vorstehenden Ausführungen.