Rainer v. Kügelgen

VORBEMERKUNGEN ZU GEGENSTAND UND STELLENWERT SCHULISCHER MATHEMATIK

Die folgenden Überlegungen richten sich an Lehrerinnen und Lehrer der Mathematik im engeren und der Naturwissenschaft im weiteren Sinne sowie an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe. Der Zweck der Überlegungen besteht in der Eröffnung bzw. im Aufgreifen einer Diskussion über Inhalte und Methoden des Mathematik-unterrichts. Dabei wird vor allem der Illusion der Averbalität der Mathematik (Reduktion aufs algebraische oder gar numerische Operieren) entgegengetreten und es werden Konsequenzen der Tatsache entfaltet, dass die Mathematik sich in spezialisierter Weise mit einem schmalen Ausschnitt aus dem Potential sprachlichen Handelns befasst, das den Lehr-Lerndiskurs ausmacht. Nachdem ein möglicher Nachweis geführt wird, wie sich die schulische Mathematik an den Bereich allgemeinen sprachlichen Handelns im Lehr-Lerndiskurs angliedert, liegt der Schwerpunkt des Artikels auf der Fragestellung, wie ein solches als sprachliches Handeln gefasstes Mathematik-Lehren und -Lernen verstehensorientiert, d.h. mit Gewinn für Denkfähigkeit, Kreativität und Transferfähigkeit betrieben werden kann. Abschließend wird die These aufgestellt, dass eine solche Erneuerung des Mathematikunterrichtes auf grundlegende Fähigkeiten im Umgang mit dem zentralen Gerät des Lehrberufs angewiesen ist: auf eine handlungstheoretisch basierte Diskursanalyse.

Entgegen der tiefsitzenden Überzeugung vieler Schüler befasst sich die Mathematik *nicht* in erster Linie mit Rechnen und Formeln, sondern mit *Aussagen*. Was ist eine Aussage?

Allgemeinsprachlich liegt eine Aussage vor, wenn ein Sprecher S einem Hörer H mitteilt, dass einem SACHVERHALT y eine EIGENSCHAFT x ZUKOMMT und wenn der *Zweck* dieser Mitteilung in der Erweiterung des Wissens von H liegt.

In *Texten*, besonders Fach- und Wissenschaftstexten, treten Sprecher und Hörer (bzw. Schreiber und Leser) scheinbar zurück und übrig bleibt eine Äußerung der Struktur »y kommt x zu«. Dazu ein einfaches Beispiel:
»Hans macht Krach.«
Hier KOMMT die EIGENSCHAFT des Krachmachens dem Hans ZU. Sowohl SACHVERHALT und EIGENSCHAFT als auch das ZUKOMMEN können in der Allgemeinsprache auch sehr viel anspruchsvoller sein, wie etwa in dem folgenden Beispiel (einem Aphorismus von Adorno):
»Der Wert eines Gedankens misst sich an seiner Distanz von der Kontinuität des Bekannten.«
Hier ist das ZUKOMMEN ein Gemessen-werden und die EIGENSCHAFT x, die dem SACHVERHALT y (dem Wert eines Gedankens) zukommt, ist seine Distanz von der Kontinuität des Bekannten. Dennoch weist das anspruchsvolle Beispiel, wie ersichtlich wird, die gleiche Struktur auf, wie das einfache. An diesem Beispiel sehen wir, dass in der Allgemeinsprache sowohl der SACHVERHALT als auch die EIGENSCHAFT, die dem Sachverhalt ZUKOMMT, wie schließlich die Art und Weise des ZUKOMMENs jeweils in sich kompliziert zusammengesetzt (*hochkomplex*) sein können und dass es mannigfaltige Möglichkeiten für alle drei Elemente gibt.

Demgegenüber trifft die Mathematik bei der Zusammensetzung aller drei Komponenten der Aussage (SACHVERHALT, EIGENSCHAFT, ZUKOMMEN) eine strenge Auswahl: Wenn sich SACHVERHALT und EIGENSCHAFT ihrerseits aus mehreren Elementen zusammensetzen, so gibt es nur sehr wenige Möglichkeiten, diese Elemente miteinander zu verknüpfen. Bei diesen Verknüpfungen handelt sich um die bekannten Grundoperationen (»plus, minus, mal, geteilt«) und einige wenige zusätzliche, die auf die ersteren zurückgehen (»Wurzel, hoch, Logarithmus, Sinus, …«).

Wie steht es nun mit den Möglichkeiten des ZUKOMMENs in der Mathematik? Hier ist die Einschränkung gegenüber der Allgemeinsprache sogar in zweifacher Weise noch größer: Denn erstens gibt es neben der Aussage in der Allgemeinsprache eine Unzahl weiterer Großformen des Sprechens – *sprachlicher Handlungsmuster* – z.B. die Frage, die Regiefrage, die Drohung, die Erzählung, die Reklamation, den Befehl, den Vorwurf, die Entschuldigung, das Versprechen, das Begründen, die Erklärung usw. (um nur einige wenige zu nennen). Aus dieser gewaltigen Vielzahl möglicher Kommunikationsformen greift sich die Mathematik *eine einzige* heraus, nämlich die Aussage.

Zweitens trifft die Mathematik *innerhalb* des Bereiches der Aussage eine weitere elementare Einschränkung: Hinsichtlich der Arten und Weisen des ZUKOMMENs von x zu y lässt die Mathematik nur eine Handvoll der unzähligen Möglichkeiten zu, die es in der Allgemeinsprache gibt. Von dieser Handvoll Möglichkeiten nimmt wiederum eine, nämlich die *Aussageform der Gleichung* den Löwenanteil in Anspruch.

Eine Gleichung ist eine Aussage der Form

»Über y wird ausgesagt, dass es so groß ist wie x«. (Algebraisch: $y = x$)

Eine weitere Aussageform ergibt sich durch die schlichte Negation der ersten: Die Ungleichung ($y \neq x$). Ist y nicht so groß wie x, so ist es logischerweise entweder »größer« ($y > x$) oder »kleiner« ($y < x$).

Eine weitere wichtige Aussageform der Mathematik ist die *Funktion*. Hier KOMMT es dem SACHVERHALT y ZU, dass er eine Funktion von x ist, d.h. dass man (in der Regel) aus der Anwendung bestimmter mathematischer Verfahren auf x ein y erzeugen kann, das eindeutig zu dem gewählten x gehört, z.B.
»y ist gleich Funktion von x ist gleich x-Quadrat« ($y = f(x) = x^2$).

Nennen wir als weitere Aussageformen noch das »Element sein von« ($y \in x$), das »kongruent sein« ($y \quad x$), das »identisch sein« ($y \equiv x$) mit ihren jeweiligen Negationen, so ist der Vorrat dessen, was mit der (schulischen) Mathematik aussagbar ist, bereits weitgehend erschöpft.

Nun besteht die Allgemeinsprache nicht aus einzelnen Äußerungen und schon gar nicht aus (Aussage-) Sätzen, sondern aus *Diskursen* bzw. *Texten*, allgemein gesagt aus der *Vernetzung* von Äußerungen zu größeren kommunikativen Gebilden: Z.B. ein Witz oder eine Leidensgeschichte werden erzählt, ein mathematischer Zusammenhang wird erklärt usw. Hier gilt in voller Tragweite der Satz: »Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile«.

So ist die Summe der Wörter zwar gewaltig groß aber doch begrenzt und schon gar begrenzt ist die Menge der speziellen Verbindungswörter, der sogenannten *Junktoren*. Über alle Maßen groß, d.h. unendlich sind aber die Möglichkeiten, die Wörter zu Äußerungen und die Äußerungen zu Diskursen und Texten zu vernetzen.

Wie nach dem Vorgesagten nicht weiter überraschend, zeichnet sich die Mathematik auch in diesem zentral wichtigen Bereich durch große Armut aus: Miteinander vernetzbar sind mathematische Aussagen nur durch einige wenige Junktoren, z.B. »und« ($\wedge$), »oder« (v), »wird zugeordnet« (—>), »daraus folgt« ($\Rightarrow$) oder »wird äquivalent umgeformt zu« ($\Leftrightarrow$) und ein paar andere.

Es ist unschwer ersichtlich, dass schon im Bereich der Aussageformen und noch viel mehr in den Bereichen der SACHVERHALTe, der EIGENSCHAFTen, der Arten und Weisen des ZUKOMMENs der EIGENSCHAFTen zu den SACHVERHALTen und schließlich der Möglichkeiten des Vernetzens der Äußerungen zu Großformen des Kommunizierens jedes Kind über einen sprachlich-geistigen Fundus verfügt, dessen Vielfalt, Differenziertheit und Reichtum die Mathematik nicht erreichen kann.

Die Mathematik ist demnach eine Disziplin, die ihre Exaktheit und scheinbare formale und logische Geschlossenheit durch eine gewaltige *Reduktion des Phänomenbereichs*, mit dem sie sich befasst, erkauft. Die positive Seite dieser Reduktion, die eine unvermeidliche Begleiterscheinung von Wissenschaft ist, besteht in Gestalt der Spezialisierung in der Konsequenz und Tiefe der

Erkenntnis. Die negative Seite besteht in der beschriebenen Vertrichterung der Erkenntnis[1].

Warum also der angemaßte und oft zugestandene hohe Stellenwert der Mathematik? Wie jede (Spezial-) Wissenschaft hat es auch die Mathematik auf ihrem Gebiet durch systematisches Vorgehen zu einer beträchtlichen Anzahl mehr oder weniger interessanter Schlussfolgerungen gebracht. Im Unterschied zu anderen Wissensgebieten beansprucht die Mathematik jedoch für ihre eigenen Ergebnissen einen allgemeinen Gültigkeits- und Wahrheitsanspruch. Diesen Anspruch leitet sie aus ihren abstrakten, formalisierten und logischen, d.h. scheinbar objektiven, scheinbar neutralen *Methoden* her.

In unserer, durch eine unhinterfragte Dominanz von Technik und Naturwissenschaft geprägten Gesellschaft findet sich ebenso dominierend eine unhinterfragte Gleichsetzung von Wahrheit und Objektivität mit Mathematik bzw. mathematisierten Methoden der Erkenntnis. Diese z.B. in der unangemessenen Bedeutung der Statistik sich ausdrückende und in der Ideologie des Positivismus zum vorherrschenden Wissenschaftskonzept festgeschriebene, mathematisch-naturwissenschaftliche Schieflage ist einer der großen Irrtümer der Gegenwart. Anderen Bereichen von Wissenschaft und Gesellschaft übergestülpt zeitigt der

[1] Ein Oscar Wilde zugeschriebener Aphorismus bringt diese allgemeine Problematik der Spezialisierung auf den Begriff: »Ein Spezialist ist ein Mensch, der immer mehr über immer weniger weiß, bis er schließlich alles über nichts weiß.«

Wahrheits- und Gültigkeitsanspruch der Mathematik und ihrer Methoden verhängnisvolle Konsequenzen.

Das Gesagte ist *kein* Plädoyer für eine Abschaffung der Mathematik, sondern für ihre *kritische Verortung.* Die Einsicht in die Beschränktheiten, denen dieses Fach unterworfen ist, ist eine Voraussetzung eines solchen kritischen Umgangs. Indem das inhaltlich und vor allem methodisch Exemplarische *als Exemplarisches* bewusst gemacht wird, verliert es seinen überzogenen Gültigkeitsanspruch. Dann kann es nicht schaden, zu schauen, was man mit »ist so groß wie«, »wird äquivalent umgeformt zu« und »ist Funktion von« etc. alles anfangen kann.

Es sei hier aber unmissverständlich klargestellt, dass die unterm Strich zählenden Erträge einer schulischen Befassung mit den mathematisch zugänglichen SACHVERHALTen und EIGENSCHAFTen, den Arten des ZUKOMMENs der EIGENSCHAFTen zu den SACHVERHALTen und den Vernetzungen der Aussagen weniger in den mathematischen Erkenntnissen selbst sondern *vielmehr auf einer methodisch-erkenntnistheoretischen Metaebene* liegen. Die Erträge können auf dem Gebiet der Denkfähigkeit (Einsichten in das Funktionieren des logischen, analytischen, ableitenden Denkens) und in einem Verstehen liegen, das es lernt, sich auf sein eigenes Zustandekommen (hier sei ausnahmsweise die Modephrase vom »Lernen lernen« einmal gestattet) zu richten.

Das Gesagte ist daher zweitens ein Plädoyer dafür, den Mathematikunterricht zu einem erheblichen Anteil auf die genannte methodisch-erkenntnistheoretische Metaebene zu verlagern. Eine solche Verlagerung auf die Metaebene bedeutet, dass die ablaufenden Verstehens- mehr noch aber die Nichtverstehensprozesse zum Gegenstand des Unterrichts werden, indem sie nicht nur auf die verhandelten Inhalte, sondern mehr auf die verwandten mathematischen Methoden bezogen werden.

Wenn ein solcherart erneuerter Mathematikunterricht dadurch gekennzeichnet ist, dass (Nicht-)Verstehensprozesse »live« und kritisch auf ihre inhaltlichen und methodischen Themen bezogen werden, dann wird die Fähigkeit der simultanen Analyse des Lehr-Lerndiskurses zum Dreh- und Angelpunkt einer solchen Erneuerung. Diese zentrale Bedeutung der Meisterung der unterrichtlichen Kommunikation[2] vor allem durch die Schulmeister selbst - aber auch durch die Schülerinnen und Schüler - müsste im Zuge der zu fordernden Erneuerung Gegenstand eines neuen Schulfaches werden, das in seiner Bedeutung und Anwendbarkeit der Mathematik mindestens gleichzustellen wäre. Eine detaillierte Ausführung dieses Punktes sprengt jedoch den Rahmen des Vorliegenden.

Das Gesagte ist drittens ein Plädoyer gegen die Verschwendung geistiger Energie durch die Standardform einer schulischen Mathematik, die sich darin erschöpft, Schüler zum zig millionsten

---

[2] Und zwar nicht im üblichen psychotechnischen Sinne (»Moderation«, »Metaplan« etc.), sondern im Sinne eines Zugriffs auf ablaufende (Nicht-)Verstehensprozesse von ihren sprachlichen Formen her, d.h. in Anwendung eines (diskursanalytischen) Konzeptes einer Handlungstheorie der Sprache.

Mal Parabelschnittpunkte oder maximale Volumina errechnen zu lassen – als ob die betreffenden Ergebnisse bzw. die Beherrschung der handwerklichen Routinen zu ihrer Erzeugung von irgendeinem Interesse oder Nutzen für die Lebenspraxis wären.

Wichtig ist, dass Sie, die jeweils neue Generation, den methodisch-erkenntnistheoretischen Extrakt, die Fähigkeit zur Reflexion der eigenen Erkenntnistätigkeit, die Konzepte und das Know-How des Rauskriegens, Beweisens und Ableitens mit in ihr späteres Leben nehmen. Stehen der genannte Extrakt, die Konzepte und das Know-How im Zentrum des Unterrichts, so wird die *Transferfähigkeit* und die *Kreativität* geschult. Hier kann ein gelingender Mathematikunterricht einen Beitrag auf einem (dann auch interessanten) Gebiet liefern.

Darum gehts.